На правах рукописи

ШМЕЛЁВА НАТАЛИЯ ГЕОРГИЕВНА

Краевые задачи для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с комплексным параметром

01.01.02 – "Дифференциальные уравнения"

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук

Казань – 2003

Работа выполнена на кафедре математического анализа Стерлитамакского государственного педагогического института

Научный руководитель доктор физико – математических наук, профессор Сабитов К.Б.

Официальные оппоненты: доктор физико – математических наук, профессор Мухлисов Ф.Г.

доктор физико – математических наук, профессор Плещинский Н.Б.

Ведущая организация Башкирский государственный университет

Защита состоится "22" января 2003 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете имени В.И. Ульянова – Ленина по адресу: г. Казань, ул. Университетская, 17.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан ___________ 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.– мат. наук, доцент Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория уравнений смешанного типа имеет сравнительно недолгую историю. Уравнения смешанного типа стали объектом систематических исследований с конца сороковых годов. Возникшие в приложениях проблемы, в частности проблемы околозвукового течения сжимаемой среды и безмоментной теории оболочек, описываются уравнениями смешанного типа второго порядка, для которых задача Трикоми, так и, другие ее математические обобщения имеют вполне определенный физический или геометрический смысл. Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в известных работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта, где были впервые поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа, теперь известные как "Задача Трикоми" и "Задача Геллерстедта".

Ф.И.Франкль обнаружил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газодинамике. И.Н.Векуа указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а также в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака. А.В.Бицадзе впервые сформулировал принцип экстремума для задачи Трикоми. Позднее он был доказан и для других краевых задач для уравнений смешанного типа. В дальнейшем были поставлены и исследованы новые задачи для уравнений смешанного типа как в нашей стране (В.Ф. Волкодавов, В.Н. Врагов, Т.Д. Джураев, В.И. Жегалов, Т.Ш. Кальменов, А.И. Кожанов, Ю.М. Крикунов, О.А. Ладыженская, М.Е. Лернер, В.П. Михайлов, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, Н.Б. Плещинский, С.М Пономарев, С.П. Пулькин, О.А. Репин, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, Л.И. Чибрикова, Хе Кан Чер, Р.С. Хайруллин и другие), так и за рубежом (S. Agmon, L. Nirenberg, M.N. Protter, C.S. Morawetz, P. Germain, R. Bader, P.O. Lax, R.P. Phillips, M. Schneider, Г.Д. Каратопраклиев, Г.Д. Дачев, Н.И. Попиванов и другие). Основные результаты этих работ и соответствующая им библиография приведены в монографиях А.В. Бицадзе, Л. Берса, К.Г. Гудерлея, М.М. Смирнова, М.С. Салахитдинова, Е.И. Моисеева.

Разработкой теории вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных занимались М.В. Келдыш, Г.К. Фикера, М.И. Вишик, С.А. Терсенов, А.И. Киприянов, Н.Р. Раджабов, Ф.Г. Мухлисов и другие. Спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов посвящены работы В.А. Ильина, В.А. Садовничего, Я.Т. Султанаева, Х.Х. Муртазина и многих других математиков.

Основной целью работы является доказательство теорем единственности и существования решения известных краевых задач для уравнения

$$u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} + \lambda u = 0$$

с комплексным параметром λ в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом смешанной области на основе интегрального представления его регулярных решений.

Методы исследования. При доказательстве теорем существования решения поставленных задач применяется интегральное представление, полученное в работах [1-3], и используется метод сведения краевых задач к сингулярному интегральному уравнению, которое методом регуляризации Карлемана – Векуа сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

При доказательстве единственности решения краевых задач используются принципы экстремума для дифференциальных уравнений различных типов, метод вспомогательных функций и метод интегральных тождеств, основанный на интегральном преобразовании Лапласа.

Научная новизна. 1. Новым подходом доказаны теоремы об однозначной разрешимости решения задач Дирихле, Неймана, Хольмгрена для метагармонического уравнения.

2. Получены новые интегральные представления решений задач Коши, Гурса, Дарбу и обобщенных задач Дарбу для телеграфного уравнения.

3. Доказаны единственность и существование решения задач Трикоми, Франкля, обобщенной задачи Трикоми для уравнения

Лаврентьева – Бицадзе с комплексным параметром.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные в диссертации результаты являются новыми и имеют теоретический характер. Они могут быть использованы при дальнейшей разработке теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Апробация работы. Результаты, приведенные в диссертации, докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры математического анализа Стерлитамакского государственного педагогического института (научные руководители – доктора физ. – мат. наук, профессора К.Б. Сабитов, Ф.Х. Мукминов, 1995 – 2002 гг.), на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета (научный руководитель – профессор В.И. Жегалов, декабрь 2002 г.), на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета (научный руководитель – профессор Я.Т. Султанаев, ноябрь 2002 г.), а также па следующих конференциях.

1. Международный семинар "Дифференциальные уравнения и их приложения" (г. Самара, июнь 1995).

2. Международная конференция "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (г. Уфа, июнь 1996).

3. Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения. Специальные функции" , посвященная 90-летию со дня рождения профессора С.П. Пулькина (г. Самара, май 1997).

4. Школа – конференция "Алгебра и анализ" , посвященная 100 – летию со дня рождения Б. М. Гагаева (г. Казань, июнь 1997).

5. Всероссийская научная конференция "Физика конденсированного состояния" (г. Стерлитамак, сентябрь 1997).

6. Международная научная конференция "Спектральная теория дифференциальных операторов, смежные вопросы" , посвященная юбилею академика В.А. Ильина (г. Стерлитамак, сентябрь 1998).

7. Воронежская весенняя математическая школа "Современные методы в теории краевых задач" (г. Воронеж, май 2002).

8. Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения" (г. Самара, май 2002).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в работах [4] – [11], список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 11 параграфов, списка литературы. Объем диссертации составляет 101 страницу, включая список литературы, состоящий из 76 наименований.

Основное содержание работы

Во введении приведен обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы и сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В главе 1 в области $D \subset R^2$, звездной относительно начала координат, рассматривается метагармоническое уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \neq 0$ – комплексное число, и исследуются задачи Дирихле, Неймана и Хольмгрена.

В § 1.1 показана взаимная обратимость интегрального представления

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int\limits_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}]dt \tag{2}$$

относительно функций $u_0(x,y)$ и $u(x,y)$. Интегральное представление (2) получено И.Н.Векуа [1] в области $D \subset R^2$, звездной относительно начала координат, и оно связывает все регулярные

(дважды – непрерывно дифференцируемые) решения метагармонического уравнения (1) с решениями $u_0(x,y)$ уравнения Лапласа

$$u_{0xx} + u_{0yy} = 0. \tag{3}$$

В § 1.2 рассмотрена первая граничная задача для уравнения (1) в области D,.ограниченной кривой Γ из класса Ляпунова.

Задача Дирихле. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D);$$

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in D;$$

$$u(x,y)\Big|_\Gamma = u(x(s),y(s)) = f(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$

где $f(s)$ – заданная непрерывная функция; $x = x(s)$, $y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ; s – длина дуги кривой Γ, отсчитывается от фиксированной точки против часовой стрелки; l – длина кривой Γ.

С помощью интегрального представления (2) решение задачи Дирихле для уравнения (1) сведено к решению задачи Дирихле для уравнения (3) с неизвестным краевым условием $u_0(x,y)\Big|_\Gamma = f_0(s)$, $0 \leq s \leq l$.

Результат сформулирован в виде следующего утверждения.

Теорема 1.2. *Если $f(s) \in C[0,l]$, λ не является собственным значением задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D, то существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения (1) в D, которое определяется формулой (2), где $u_0(x,y)$ – решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с граничным условием $u_0 = f_0(s)$ на Γ, а $f_0(s)$ есть решение интегрального уравнения Фредгольма*

$$f_0(s) + \int\limits_0^l f_0(\tau)K(\tau,s)d\tau = f(s),$$

где ядро $K(\tau, s)$ непрерывно в квадрате $0 \le \tau, s \le l$.

В § 1.3 для уравнения (1) в области D, ограниченной кривой Γ из класса Ляпунова, изучена вторая граничная задача.

Задача Неймана. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D);$$

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in D;$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial N}\right|_{\Gamma} = \frac{\partial u(x(s), y(s))}{\partial N} = g(s), \quad 0 \le s \le l,$$

где $g(s)$ – заданная непрерывная функция; $\dfrac{\partial u}{\partial N}$ – производная по внешней нормали к границе Γ.

Аналогично § 1.2 решение задачи Неймана для уравнения (1) эквивалентно редуцировано к решению задачи Неймана для уравнения (3) с неизвестным краевым условием $\dfrac{\partial u_0(x,y)}{\partial N} = g_0(s)$, $0 \le s \le l$.

Показана справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.3. *Если $g(s) \in C[0,l]$ и λ не является собственным значением задачи Неймана для оператора Лапласа в области D, то существует единственное решение задачи Неймана для уравнения (1) в D, которое определяется формулой (2), где $u_0(x,y)$ – решение задачи Неймана для уравнения Лапласа с граничным условием $\dfrac{\partial u_0}{\partial N} = g_0(s)$ на Γ, а $g_0(s)$ – есть решение интегрального уравнения Фредгольма*

$$g_0(s) - \int_0^l g_0(\tau) H(\tau, s) d\tau = g(s),$$

где ядро $H(\tau, s)$ непрерывно в квадрате $0 \le \tau, s \le l$.

В § 1.4 рассмотрена смешанная задача для метагармонического уравнения (1) в области D, ограниченной кусочно – гладкой

кривой Γ, состоящей из гладкой дуги Γ_1 класса Ляпунова, лежащей в полуплоскости $y > 0$ и отрезка AB оси $y = 0$, $A(0,0)$, $B(1,0)$.

Задача Хольмгрена. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup AB) \cap C^2(D);$$

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in D;$$

$$\left.u(x,y)\right|_{\Gamma_1} = u(x(s), y(s)) = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l_1;$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{AB} = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $\varphi(s)$ и $\nu(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, l_1 – длина кривой Γ_1.

Задача Хольмгрена для уравнения (1) в области D сведена к решению задачи Хольмгрена для уравнения (3) с неизвестными краевыми условиями: $\left.u_0(x,y)\right|_{\Gamma_1} = \varphi_0(s)$, $0 \le s \le l_1$, $\left.\dfrac{\partial u_0(x,y)}{\partial y}\right|_{AB} = \nu_0(x)$, $0 < x < 1$.

Теорема 1.4. *Если $\varphi(s) \in C[0, l_1]$, $\nu(x) \in L[0,1] \cap C(0,1)$ и λ не является собственным значением задачи Хольмгрена для оператора Лапласа в области D, то существует единственное решение задачи Хольмгрена для уравнения (1) в D, которое определяется формулой (2), где $u_0(x,y)$ – решение задачи Хольмгрена для уравнения Лапласа с граничными данными $u_0 = \varphi_0(s)$ на Γ_1 и $u_{0y}(x,0) = \nu_0(x)$ на AB, а $\varphi_0(s)$, $\nu_0(x)$ есть решения системы интегральных уравнений Фредгольма*

$$\begin{cases} \varphi_0(s) + \int\limits_0^{l_1} \varphi_0(\tau) K_1(\tau, s) d\tau - \int\limits_0^1 \nu_0(\xi) K_2(\xi, s) d\xi = \varphi(s), & 0 \le s \le l_1; \\ \nu_0(x) - \int\limits_0^1 \nu_0(\tau) H_1(\xi, x) d\xi + \int\limits_0^{l_1} \varphi_0(\tau) H_2(\tau, x) d\tau = \nu(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

где ядра $K_1(\tau,s)$, $K_2(\xi,s)$, $H_1(\xi,x)$, $H_2(\tau,x)$ непрерывны соответственно в областях $[0,l_1]\times[0,l_1]$, $[0,1]\times[0,l_1]$, $[0,1]\times[0,1]$, $[0,l_1]\times[0,1]$.

В первом параграфе **главы 2** показано, что имеет место аналог интегрального представления (2) для телеграфного уравнения

$$u_{xx}-u_{yy}+\lambda u=0, \tag{4}$$

где $\lambda\in C$, и доказана его взаимная обратимость относительно функций $u_0(x,y)$ и $u(x,y)$, где $u_0(x,y)$ – регулярное решение уравнения струны.

В §§ 2.2 – 2.3 на базе интегрального представления

$$u(x,y)=u_0(x,y)-\int_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)(1-t)}]dt \tag{5}$$

решаются задачи Коши, Гурса, Дарбу для телеграфного уравнения (4) соответственно в областях:

1) D_-, ограниченной характеристиками: $AC\,(x+y=0)$, $CB\,(x-y=1)$ и отрезком $AB\,(y=0)$;

2) G_-, ограниченной характеристиками: $AN\,(x-y=0)$, $NB\,(x+y=1)$, $AM\,(x+y=0)$ $MB\,(x-y=1)$.

3) D_{k_-}, ограниченной прямыми: $AC_k\,(kx+y=0,\ 0<k<1)$, $AB\,(y=0)$ и характеристикой $C_kB\,(x-y=1)$.

В § 2.2 для уравнения (4) в областях D_- и G_- изучаются задачи Коши и Гурса.

Задача Гурса. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y)\in C(\overline{G}_-)\cap C^2(G_-);$$

$$u_{xx}-u_{yy}+\lambda u=0,\quad (x,y)\in G_-;$$

$$u(x,y)\Big|_{y=-x}=\psi(x),\quad 0\le x\le 1/2;$$

$$u(x,y)\Big|_{y=x}=\varphi(x),\quad 0\le x\le 1/2,$$

причем $\psi(0)=\varphi(0)$, где $\varphi(x),\psi(x)$ являются заданными достаточно гладкими функциями.

Доказана следующая

Теорема 2.2. *Если функции $\psi(x)\in C[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$, $\varphi(x)\in C[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$ и $\psi(0)=\varphi(0)$, то существует единственное решение задачи Гурса для уравнения (4), которое определяется формулой*

$$u(x,y)=\varphi(\frac{x+y}{2})+\psi(\frac{x-y}{2})-$$

$$-\int_0^1\left[\varphi(\frac{xt+yt}{2})+\psi(\frac{xt-yt}{2})\right]\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)(1-t)}]dt-$$

$$-\psi(0)J_0[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}].$$

Аналогично, в области D_- строится решение задачи Коши.

В § 2.3 для уравнения (4) в областях D_- и D_{k_-} рассматриваются задачи Дарбу и обобщенные задачи Дарбу. Для примера приведем результат по обобщенной задаче Дарбу.

Обобщенная задача Дарбу (задача D_{01}). *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y)\in C(\overline{D}_{k_-})\cap C^2(D_{k_-}); \tag{6}$$

$$u_{xx}-u_{yy}+\lambda u=0,\quad (x,y)\in D_{k_-}; \tag{7}$$

$$u(x,y)\Big|_{AC_k}=u(x,-kx)=\psi(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{1+k}; \tag{8}$$

$$u(x,y)\Big|_{AB}=u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{9}$$

причем $\psi(0)=\tau(0)$, $0<k<1$, где $\psi(x)$, $\tau(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Лемма 2.3. *Если $\tau_0(x)\in C[0,1]\cap C^1[0,1)\cap C^2(0,1)$, $\psi_0(x)\in C[0,\frac{1}{1+k}]\cap C^1[0,\frac{1}{1+k})\cap C^2(0,\frac{1}{1+k})$, $\tau_0(0)=\psi_0(0)=$*

0, *функции* $\tau_0''(x\alpha^n)\alpha^n$ *и* $\psi_0''(x\alpha^n)\alpha^n$ *ограничены по* n *при любом фиксированном* x , *то функция*

$$u_0(x,y) = \tau_0(x+y) -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\psi_0[\frac{1+\alpha}{2}\alpha^n(x+y)] - \tau_0[\alpha^{n+1}(x+y)]\right\} + \qquad (10)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\psi_0[\frac{1+\alpha}{2}\alpha^n(x-y)] + \tau_0[\alpha^{n+1}(x-y)]\right\},$$

где $\alpha = (1-k)/(1+k)$, *является решением задачи* D_{01} *с данными* $u_0(x,-kx) = \psi_0(x)$, $0 \le x \le \dfrac{1}{1+k}$; $u_0(x,0) = \tau_0(x)$, $0 \le x \le 1$ *для уравнения струны.*

Теорема 2.5. *Если функции* $\tau(x) \in C[0,1]\cap C^1[0,1)\cap C^2(0,1)$, $\psi(x) \in C[0,\frac{1}{1+k}]\cap C^1[0,\frac{1}{1+k})\cap C^2(0,\frac{1}{1+k})$, $\tau(0) = \psi(0) = 0$, *а функции* $\tau''(\alpha^n x)\alpha^n$ *и* $\psi''(\alpha^n x)\alpha^n$ *ограничены по* $n \in N$ *при любом фиксированном* x, *то существует единственное решение задачи* (6) – (9) *и это решение определяется формулой* (5), *где* $u_0(x,y)$ — *выражается формулой* (10), *а* $\tau_0(x)$ *и* $\psi_0(x)$ — *находятся соответственно по формулам:*

$$\tau_0(x) = \tau(x) + \int_0^x \tau(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}I_0[\sqrt{\lambda t(x-t)}]dt,$$

$$\psi_0(x) = \psi(x) + \int_0^x \psi(s)\frac{x}{s}\frac{\partial}{\partial x}I_0[\sqrt{\lambda(1-k^2)s(x-s)}]ds,$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя.

В главе 3 изучены краевые задачи Трикоми, Франкля и обобщенная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с комплексным параметром

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} + \lambda u = 0 \qquad (11)$$

в областях:

1) D, ограниченной ляпуновской кривой Г, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$ и характеристиками $AC\,(x+y=0)$, $CB\,(x-y=1)$ уравнения (11) при $y < 0$,

2) G, ограниченной: отрезком AA' оси $x = 0$, $|y| < a$, $a > 0$, характеристикой $A'C$ уравнения (11), $A'(0,-a)$, $C(c,0)$; и кривой Г из класса Ляпунова с концами в точках $A(0,a)$ и $C(c,0)$, лежащей в первой четверти,

3) D_k, ограниченной ляпуновской кривой Г, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, и при $y < 0$ – прямой $AC_k\,(kx+y=0,\ 0<k<1)$ и характеристикой $C_kB(x-y=1)$ уравнения (11).

Пусть Ω – любая из указанных выше областей D или D_k. $\Omega_+ = \Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_- = \Omega\cap\{y<0\}$.

Определение 3.1. Под регулярным в Ω решением уравнения (11) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям: $u(x,y) \in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_+\cup\Omega_-)$ и $Lu \equiv 0$ при $(x,y) \in \Omega_+\cup\Omega_-$, при этом производные u_x, u_y непрерывны в $\overline{\Omega}$ за исключением точек A и B, где они могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.

В § 3.1 на основании работ В.И.Жегалова [2], К.Б.Сабитова [3] показана взаимная обратимость интегрального представления

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2+sgny\cdot y^2)(1-t)}]dt \qquad (12)$$

регулярных решений уравнения (11) относительно функций $u_0(x,y)$ и $u(x,y)$, где $u_0(x,y)$ – регулярное решение уравнения Лаврентьева – Бицадзе

$$u_{0xx} + sgny\cdot u_{0yy} = 0. \qquad (13)$$

Результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Если функции* $u(x,y)$ *и* $u_0(x,y)$ *являются соответственно регулярными в* D *решениями уравнений* (11) *и* (13), *то между решениями этих уравнений существует взаимно – однозначное соответствие, которое устанавливается по* *формулам:*

$$\tilde{u}(r) = \tilde{u}_0(r) - \int\limits_0^r \tilde{u}_0(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0[\sqrt{\lambda r(r-s)}]ds,$$

$$\tilde{u}_0(r) = \tilde{u}(r) + \int\limits_0^r \tilde{u}(s)\frac{r}{s}\frac{\partial}{\partial r}I_0[\sqrt{\lambda s(r-s)}]ds,$$

где $r^2 = x^2 + sgny\cdot y^2$, $u(x,y) = u(\frac{x}{r}r, \frac{y}{r}r) = \tilde{u}(r)$, $u_0(\frac{x}{r}s, \frac{y}{r}s) = \tilde{u}_0(s)$, $I_0(\cdot)$ – *модифицированная функция Бесселя.*

В § 3.2 изучены вопросы единственности и существования решения задачи Трикоми для уравнения (11) в области D.

Задача Трикоми. *Найти функцию u(x,y), удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{14}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{15}$$

$$u(x,y)\Big|_\Gamma = u(x(s),y(s)) = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l, \tag{16}$$

$$u(x,y)\Big|_{AC} = u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1/2, \tag{17}$$

где $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi(s)$ *и* $\psi(x)$ – *заданные достаточно гладкие функции.*

Доказана единственность решения задачи (14) – (17) в классе регулярных в D решений без каких – либо ограничений геометрического характера на кривую Г и при некотором ограничении на параметр λ. Результат сформулирован в виде следующих теорем.

Теорема 3.3. *Если в классе регулярных в D решений уравнения* (11) *существует решение задачи* (14) –(17), *то оно единственно при всех комплексных* λ, *удовлетворяющих условиям:*

$$|Jm\lambda| < \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{t_2 - t_1}\right)^2 + \sqrt{2}Re\lambda \quad \text{при} \quad Re\lambda < 0;$$

$$|Jm\lambda| < \sqrt{2}\frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{t_2 - t_1}\right)^2 \quad \text{при} \quad Re\lambda \ge 0,$$

где $t_2 = \max\limits_{\overline{D}} 2y$, $t_1 = \min\limits_{\overline{D}} 2y$.

Теорема 3.4. *Если в классе регулярных в D решений уравнения* (11) *существует решение задачи* (14) – (17), *то оно единственно при всех комплексных* λ, *удовлетворяющих условию*

$$|\lambda| < 2\alpha_0 - Re\lambda, \ \alpha_0 = \frac{4}{9mesD_+}.$$

Для доказательства разрешимости задачи Трикоми для уравнения (11) используется интегральное представление (12) [2]. Данное интегральное представление в классе регулярных в D решений уравнения (11) позволяет свести решение задачи (14) – (17) к решению задачи Трикоми для уравнения (13) в области D с неизвестными краевыми условиями $u_0 = \varphi_0$ на Г и $u_0 = \psi_0$ на AC. При этом предполагается, что кривая Г оканчивается в точках А и В сколь угодно малой длины дугами полуокружности: $(x-1/2)^2 + y^2 = 1/4$.

Теорема 3.5. *Если* $\varphi(s) \in C[0,l]$ *и в достаточно малой окрестности точек* $s = 0$ *и* $s = l$ *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\alpha \in [1/2, 1]$, $\psi(x) \in C^1[0,1/2] \cap C^2(0,1/2)$, $\psi'(x) \in L_2[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = 0$, *и коэффициэнт* λ *удовлетворяет условиям теоремы 3.3 или 3.4, то существует единственное решение задачи Трикоми для уравнения* (11) *в классе его регулярных в D решений, которое определяется формулой* (12), *где* u_0 – *решение задачи Трикоми для уравнения* (13) с граничными данными $u_0 = \varphi_0(s)$ на Г, $u_0 = \psi_0(x)$ на AC, *причем* $\psi_0(x) = \psi(x)$, *а* $\varphi_0(s)$ *есть решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода*

$$\varphi_0(s) - \int\limits_0^l \varphi_0(\tau)P(\tau,s)d\tau = q(s),$$

где ядро $P(\tau, s)$ непрерывно в квадрате $0 \le \tau, s \le l$, а правая часть $q(s)$ непрерывна на $[0,l]$.

В §3.3 в области D_k, где $\lambda \in R$, исследована обобщенная задача Трикоми для уравнения (11), аналогичная задаче Трикоми (14) – (17), только вместо (17) задано граничное условие

$$u(x,y)\Big|_{AC_k} = u(x,-kx) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{1+k}, \tag{18}$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Теорема 3.6. *Если в классе регулярных в D_k решений уравнения (11) существует решение обобщенной задачи Трикоми, то оно единственно при всех λ, удовлетворяющих неравенству*

$$\frac{9\pi^2}{16y_{min}^2} < \lambda \le \frac{\pi^2}{4y_{max}^2}.$$

Аналогично §3.2 для уравнения (11) решение задачи (14) – (16), (18) с помощью интегрального представления (12) в классе регулярных в D_k решений уравнения (11) сводится к решению обобщенной задачи Трикоми для уравнения (13) с неизвестными краевыми условиями $u_0 = \varphi_0$ на Г и $u_0 = \psi_0$ на AC_k.

Теорема 3.8. *Если $\varphi(s) \in C[0,l]$ и в достаточно малой окрестности точек $s=0$ и $s=l$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \in [1/2, 1]$, $\psi(x) \in C^1[0,1/2] \cap C^2(0,1/2)$, $\psi'(x) \in L_2[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = 0$, и λ удовлетворяет условиям теоремы 3.6, то существует единственное решение обобщенной задачи Трикоми для уравнения (11) в классе его регулярных в D решений, которое определяется формулой (12), где u_0 – решение обобщенной задачи Трикоми для уравнения* (13) с граничными условиями $u_0 = \varphi_0(s)$ на Г, $u_0 = \psi_0(x)$ на AC, *причем*

$$\psi_0(x) = \psi(x) + \int_0^x \psi(x)\frac{x}{s}\frac{\partial}{\partial x} I_0[\sqrt{\lambda(1+k^2)s(x-s)}]ds,$$

а $\varphi_0(s)$ есть решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi_0(s) - \int_0^l \varphi_0(\tau)P(\tau,s)d\tau = q(s),$$

где ядро $P(\tau,s)$ непрерывно в квадрате $0 \le \tau, s \le l$, правая часть $q(s)$ непрерывна на $[0,l]$.

В §3.4 в области G рассматриваются уравнения (11) и

$$Lu(x,y) \equiv sgny \cdot u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0, \tag{19}$$

где $\lambda \in R$. Пусть $G_1 = G \cap \{y > 0\}$; OP – часть характеристики уравнения (11) или (19), исходящей из точки O (0,0) до пересечения с $A'C$ в точке P ; G_2 – область ограниченная кривыми OP, PC и OC; G_3 – область, ограниченная кривыми OA', $A'P$ и PO.

Ставится следующая

Задача Франкля. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G \cup OA \cup OA' \setminus OP) \cap C^2(G_1 \cup G_2 \cup G_3); \tag{20}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in G_1 \cup G_2 \cup G_3; \tag{21}$$

$$u(x,y)\Big|_{\Gamma} = \varphi(x,y); \tag{22}$$

$$u(0,y) - u(0,-y) = f(y), \quad 0 \le y \le a; \tag{23}$$

$$u_x(0,y) = 0, \quad 0 < |y| < a, \tag{24}$$

где φ, f – заданные достаточно гладкие функции, под Lu понимается левая часть уравнения (11) или (19).

Определение 3.2. *Под регулярным в области G решением уравнений (11) или (19) понимается функция $u(x,y)$, удовлетворяющая условиям (20) и (21) задачи Франкля, и, кроме того, производные u_x, u_y непрерывны в $\overline{G}$ за исключением точек A, C, A′, O, где они могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.*

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 3.10. *Если в классе регулярных в G решений уравнения (19) существует решение задачи Франкля, то оно единственно при всех λ, удовлетворяющих неравенству*

$$\lambda > -\left(\frac{\pi}{y_{max} - y_{min}}\right)^2,$$

где $y_{min} = a$, $y_{max} \geq a$, a – ордината точки A.

Теорема 3.11. *Если в классе регулярных в G решений уравнения (11) существует решение задачи Франкля, т.е. задачи (20) – (24), то оно единственно при всех λ, удовлетворяющих неравенству*

$$-\frac{\pi^2}{y_{min}^2} < \lambda \leq \frac{(\pi - 2\varepsilon)^2}{y_{max}^2},$$

где $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ и оно достаточно малое.

Далее рассматривается вопрос о разрешимости задачи Франкля для уравнения (11). Предварительно доказывается

Лемма 3.2. *Если функция $u_0(x,y)$ является в области G регулярным решением уравнения (13), то функция*

$$u(x,y) = \begin{cases} u_0(x,y) - \int\limits_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}]dt, \\ (x,y) \in G_1, \\ u_0(x,y) - \int\limits_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(|x^2-y^2|)(1-t)}]dt, \\ (x,y) \in G_2 \cup G_3, \end{cases} \tag{25}$$

является регулярным в G решением уравнения (11).

На основании леммы 3.2 доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.13. *Если $\varphi(s) \in C[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ и в достаточно малой окрестности точек $s = 0$ и $s = l$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \in [1/2, 1]$, $f(x) \in C[0,a] \cap C_1(0,a)$, $f'(x) \in L[0,a]$ и коэффициент λ удовлетворяет условиям теоремы* 3.11, *то существует единственное решение задачи Франкля для уравнения* (11) *в классе его регулярных в G решений, которое определяется формулой* (25), *где u_0 – решение задачи Франкля для уравнения* (13) *с граничными условиями $u_0(x,y) = \varphi_0(s)$ на Γ, $u_0(0,y) - u_0(0,-y) = f_0(y)$ на OA, $u_{0x}(0,y) = 0$ на AA', причем*

$$f_0(y) = f(y) + \int\limits_0^y f(s)\frac{y}{s}\frac{\partial}{\partial y}I_0[\sqrt{\lambda s(y-s)}]ds,$$

а $\varphi_0(s)$ – есть решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi_0(s) - \int\limits_0^1 \varphi_0(\tau)P(\tau,s)d\tau = q(s),$$

где ядро $P(\tau,s)$ непрерывно в квадрате $0 \leq \tau, s \leq l$, правая часть непрерывна на $[0,l]$.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю доктору физико – математических наук, профессору Камилю Басировичу Сабитову за предложенную тематику исследований, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

Литература

1. Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* М.– Л.: Гостехиздат, – 1948. – 296 с.

2. Жегалов В.И. *Об одном случае задачи Трикоми* // Труды семинара по краевым задачам. – Изд-во Казанск. ГУ. – 1966. – Вып.3. – С. 28 – 36.

3. Сабитов К.Б. *Некоторые вопросы качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа:* Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1991.– 313 с.

4. Шмелёва Н.Г. *Об одном подходе решения краевых задач для телеграфного уравнения* // В сборнике трудов Международной конференции "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы". Уфа, ИМ УНЦ РАН, 1996.– С. 160 – 170.

5. Шмелёва Н.Г. *Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром* // Дифференц. уравнения. Интегральные уравнения. Специальные функции.: Тезисы докладов международной конференции. – Самара, Сам. ГПУ, 1997. – С. 67 – 68.

6. Шмелёва Н.Г. *О задаче Франкля для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с комплексным параметром* // Тезисы докладов научной школы – конференции, посвященной 100 – летию со дня рождения Б.М. Гагаева. – Казань, Казан. ГУ, 1997.– С. 248 – 249.

7. Шмелёва Н.Г. *Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с комплексным параметром* // Труды Всероссийской научной конференции "Физика конденсированного состояния": Том 1. Математические методы физики. – Стерлитамак, Стерлитамакский филиал АН РБ, СГПИ, 1997.– С. 138 – 143.

8. Сабитов К.Б., Шмелёва Н.Г. *Об одном подходе решения задач Дирихле и Неймана для метагармонического уравнения* // Труды Всероссийской научной конференции "Физика конденсированного состояния": Том 1. Математические методы физики. – Стерлитамак, Стерлитамакский филиал АН РБ, СГПИ, 1997. – С. 121 – 126.

9. Сабитов К.Б., Шмелёва Н.Г. *О единственности решения задачи Франкля для уравнений смешанного типа* // Вестник Башкирского университета. – 1998, № 2(1). – С. 8 – 12.

10. Шмелёва Н.Г. *Задача Франкля для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с вещественным параметром* // Сборник трудов международной научной конференции "Дифференц. уравнения и их приложения". – Самара, Сам. ГАСА, 2002 – С. 392 – 397.

11. Сабитов К.Б., Шмелёва Н.Г. *Краевые задачи для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с комплексным параметром* // Известия Вузов. Математика. – 2003, №3.

Работы [8], [9], [11] выполнены в соавторстве с научным руководителем Сабитовым К.Б., которому принадлежит постановка задач.

Диссертация выполнена при финансовой поддержке Министерства Образования Российской Федерации, код гранта 22, и Российского фонда фундаментальных исследований, коды грантов 99-01-00934, 02-01-97901.